

**Prof. Dr. rer. nat. Gert Böhme,  
Wiss. Ass. Dipl.-Ing. Oliver Pust und  
Priv.-Doz. Dr.-Ing. Olaf Wunsch**



**Universität der Bundeswehr Hamburg  
Professur für Strömungslehre  
Holstenhofweg 85  
D-22043 Hamburg  
Telefon: (0 40) 65 41-21 67  
email: oliver.pust@unibw-hamburg.de**

# **Modellhafte Untersuchung der pulsierenden Strömung in pathologischen Blutgefäßen**

## **1. Einleitung**

Vielfach wird heute die Notwendigkeit interdisziplinärer Forschungstätigkeit betont. In zunehmendem Maße lassen sich aktuelle Problemfelder nicht mehr mit den Kenntnissen aus einer einzigen Fachrichtung bearbeiten. Die Komplexität der heutigen, vitalen Fragestellungen macht es erforderlich, jenseits der Grenzen althergebrachter Disziplinen nach deren Beantwortung zu suchen. Wichtige Voraussetzungen für erfolgreiches, fächerübergreifendes Arbeiten sind die Bereitschaft ggf. über den eigenen Schatten zu springen, Wissensdefizite offen anzusprechen, nach geeigneten Kooperationspartnern zu suchen und anschließend eine gemeinsame Basis und ein gemeinsames Vokabular für die fachliche Diskussion zu finden.

Als Beispiel für eine erfolgversprechende Zusammenarbeit zwischen unterschiedlichen Disziplinen mag die im folgenden geschilderte modellhafte Untersuchung der pulsierenden Strömung in pathologischen Blutgefäßen dienen. In der Klinik für Diagnostische Radiologie der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel (CAU) befassen sich Ärzte und Wissenschaftler u. a. mit der Diagnostik und der Therapie krankhaft veränderter Blutgefäße. Zur Therapie werden

künstliche Implantate verschiedener Hersteller verwendet, deren Produkte sich z. B. durch das eingesetzte Material und die Formgebung unterscheiden.

Den Medizinern stellt sich die Frage, wie verschiedene Produkte hinsichtlich ihres Therapieerfolges bewertet werden können [6]. Primäre Aspekte sind hierbei die dauerhafte Wiedereröffnung versperrter Blutgefäße und die gleichzeitige Schonung der Blutinhaltsstoffe. Schnell wurde klar, daß zur Definition von Auswahlkriterien für die Implantate die Kenntnis der Strömungsvorgänge in den Blutgefäßen notwendig ist. Mit den diagnostischen Methoden, die den Medizinern zur Verfügung stehen, sind detaillierte Aussagen über die komplexen Strömungen in Blutgefäßen nicht möglich. So wurde an uns die Bitte herangetragen, die instationäre Strömung in einem pathologischen Blutgefäß vom ingenieurwissenschaftlichen Standpunkt aus zu untersuchen. Die Abbildung auf ein technisches System muß sich natürlich an den realen Gegebenheiten orientieren.

## **Das menschliche Gefäßsystem**

Die wesentlichen Bestandteile des Gefäßsystems sind die Arterien, die Kapillaren, die Venen und das Herz. Sie bilden einen geschlossenen Transportkreislauf, in dem von einer Pumpe (Herz) ein dünnflüssiges Transportmedium (Blut) in nachgiebigen Rohrsystemen (Gefäße) in ständiger Bewegung gehalten wird (für detaillierte Erläuterungen sei auf [9] verwiesen).

Die wichtigste Aufgabe des Gefäßsystems ist die Aufrechterhaltung des Blutkreislaufes, durch den alle lebenden Zellen des menschlichen Körpers mit den erforderlichen Stoffen versorgt und die Stoffwechselprodukte abgeführt werden. Der Blutkreislauf ist aus zwei in Reihe geschalteten Hauptkreisläufen aufgebaut: dem Körperkreislauf und dem Lungenkreislauf. Die linke Herzkammer pumpt während der Systole das durch die Lunge mit Sauerstoff angereicherte Blut in die Aorta, von der mehrere Arterien abzweigen. Diese bilden parallel geschaltete Teilkreisläufe, die die verschiedenen Organe und Körperregionen mit Blut versorgen. Die Arterien verzweigen sich in immer mehr Gefäße kleineren Durchmessers bis auf die Ebene der Kapillaren. Hier finden die verschiedenen Austauschprozesse statt. Die Kapillaren vereinigen sich in Strömungsrichtung über mehrere Stufen bis zu den Venen, die schließlich in der rechten Herzkammer münden.

Im Lungenkreislauf gelangt das sauerstoffarme Blut von der rechten Herzkammer in das Lungengefäßsystem, das prinzipiell wie das Körpergefäßsystem aufgebaut ist. Danach gelangt das nun wieder mit Sauerstoff angereicherte Blut in die linke Vorkammer. Von dort tritt es in die linke Herzkammer über; damit ist der Kreislauf geschlossen. In den großen Arterien herrscht die höchste Strömungsgeschwindigkeit. Hier kommen mittlere Geschwindigkeiten von bis zu 1 m/s bei einem Druck von bis zu 13000 Pa vor (s. Abbildung 1).

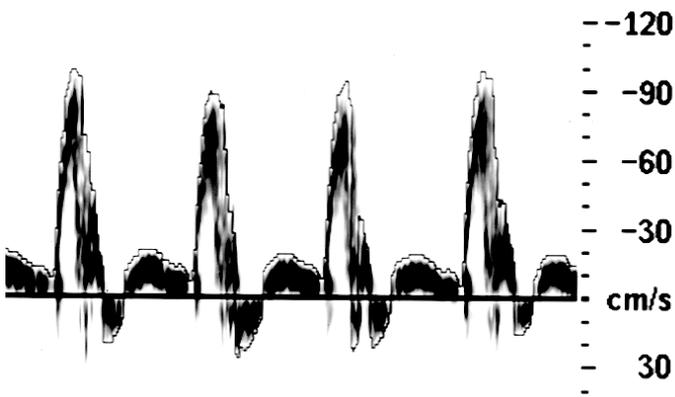


Abb. 1: Ultraschallmessung des zeitlichen Verlaufs der über den Querschnitt gemittelten Strömungsgeschwindigkeit in der Arteria femoralis. Die Periodendauer beträgt ca. 1 s [CAU].

### Arterielle Gefäßerkrankungen – Diagnose und Therapie

Aufgrund verschiedener Vorgänge, z. B. durch Narbenbildung nach Verletzungen oder durch Ablagerungen an der Gefäßwand, können in den Arterien krankhafte Veränderungen der Gefäßwand auftreten. Diese führen zu lokalen Verengungen des Strömungsquerschnitts – den sogenannten Stenosen. Sie behindern die ansonsten laminare Strömung des Blutes und erzeugen mutmaßlich komplexe Wirbelsysteme, die eventuell zu weiter verstärkten Ablagerungen und schließlich zum Gefäßverschluss führen können. In den großen Arterien, bei denen es keine alternativen Strömungswege gibt, können solche Verschlüsse lebensbedrohlich werden. Daher müssen die verengten Gefäße auf operativem Wege wieder durchgängig gemacht werden. Zu diesem Zweck muß zuerst die genaue Lage festgestellt werden. Hierzu bedienen sich die Radiologen bildgebender Verfahren wie der Computertomographie (CT) oder der Magnetresonanztomographie (MRT oder MR). Die MRT liefert zwar detailreiche Bilder der untersuchten Organe, eine genaue quantitative Beschreibung von Strömungen ist mit ihr aber nicht möglich (s. Abbildung 2 und [7]).

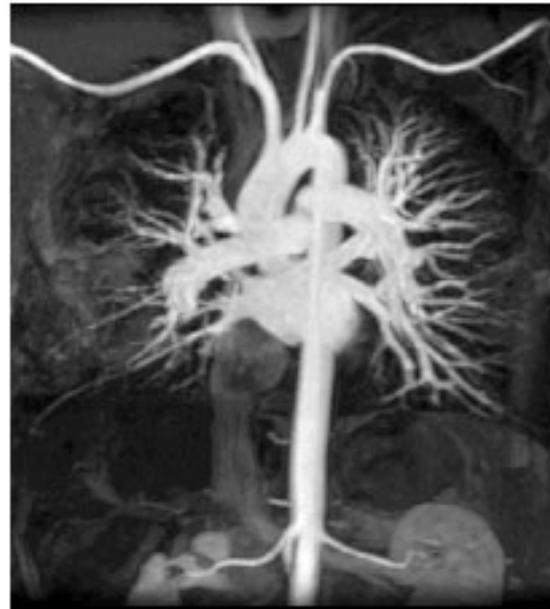


Abb. 2: MRT-Darstellung des menschlichen Gefäßsystems im Oberkörper. Erkennbar sind in der Bildmitte die großen Gefäße im Bereich des Herzens mit den links und rechts anschließenden Verzweigungen in die beiden Lungenflügel, die nach oben führenden Halsschlagadern sowie die große Körperschlagader in der unteren Bildhälfte.

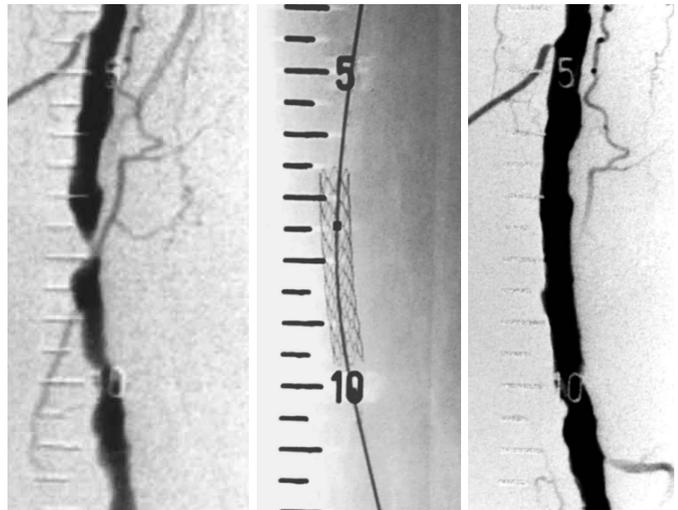


Abb. 3: Röntgen-Angiographie eines Oberschenkelgefäßes (Arteria femoralis) vor Einsetzen des Stents (links – die Stenosen und Irregularitäten sind unschwer zu erkennen), während der Implantation (mittig – der Stent, in dem noch der Führungsdraht liegt, ist bereits entfaltet; das Gefäß ist nicht sichtbar, da kein Kontrastmittel gespritzt wurde) und nach dem Einsetzen des Stents (rechts) [CAU].

Stenosen können sich als konzentrische Einschnürungen mit einer stetig zunehmenden Verengung des Gefäßquerschnitts oder auch als irregulär geformte Hindernisse darstellen (s. Abbildung 3 links). Um den Strömungsquerschnitt wieder auf sein ursprüngliches Maß zu erweitern, werden kreiszylindrische

Drahtgeflechte, sog. *Stents*, an der Engstelle eingesetzt. Sie werden über einen Drahtkatheter, auf dem sie komprimiert eng anliegen, in das kranke Gefäß eingeführt. Im Bereich der Stenose entfalten sie sich durch ihre radiale Vorspannung und öffnen so die Engstelle (s. Abbildungen 3 und 4).

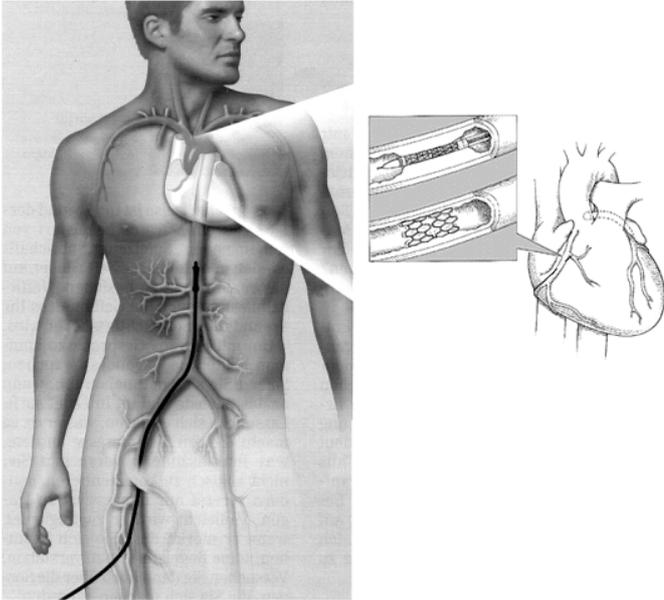


Abb. 4: Schematische Darstellung der Implantation eines Stents in ein Herzkranzgefäß. Links wird gezeigt, wie der zusammengefaltete Stent mit einem Katheter im Leistenbereich eingeführt und innerhalb des Gefäßes an den Ort der Stenose gebracht wird. Rechts ist der Stent mit der Katheterspitze im komprimierten und im entfaltenen Zustand zu sehen.

Die Hersteller bieten Stents an, die unterschiedliche Durchmesser und Längen aufweisen und aus unterschiedlichen Materialien bestehen. Die Struktur der Drahtgeflechte unterscheidet sich erheblich, um unterschiedliche Nachgiebigkeiten in Längs- oder Umfangsrichtung sowie unterschiedliche Torsionssteifigkeiten zu erzeugen. Manche Stents zeichnen sich durch eine besondere Biegsamkeit aus, die auch eine Einlage in gekrümmte Areale erlaubt. Andere Sonderbauformen sind mit einer undurchlässigen Schicht ummantelt und können dadurch zur Begrenzung des Strömungsquerschnittes bei Aneurysmen (Gefäßausstülpungen) verwendet werden.

Das Ziel unserer Untersuchungsreihe ist herauszuarbeiten, in welcher Weise Stents die Strömung durch ein pathologisches Blutgefäß beeinflussen. Hierzu wird ein Modell benötigt, mit dem man unter bewußter Beschränkung auf die wesentlichen Effekte das Strömungs- und das Druckfeld im Detail experimentell und rechnerisch studieren kann. Zur Beurteilung des Einflusses der Stents ist zunächst die Bereitstellung einer Referenzlösung erforderlich. Daher wird im ersten Teil der Untersuchungsreihe sowohl experimentell als auch numerisch zuerst die Strömung ohne Gefäßstützen betrachtet.

## 2. Strömungstechnische Modellbildung

Im Gegensatz zu hydraulischen Strömungsmaschinen (Pumpen, Gebläse), die in der Regel stationär betrieben werden, arbeitet das Herz periodisch pulsierend. Demzufolge ist der Blutstrom in den Arterien ausgeprägt instationär (s. Abbildung 1). Dabei erfährt das Blut innerhalb eines Herzzyklus Beschleunigungen und Verzögerungen bis zu  $5 \text{ m/s}^2$ , und mit der pulsierenden Strömung ist eine komplexe pulsierende Druckverteilung im Gefäßsystem verbunden. Die Differenz zwischen dem systolischen und dem diastolischen Druck, die sogenannte Druckpulsamplitude beträgt beim gesunden Erwachsenen ca. 50 mbar. Infolge einer gewissen Elastizität der Gefäßwände atmen die Gefäße unter der wechselnden Belastung geringfügig, und der Druckpuls breitet sich mit einer endlichen Wellengeschwindigkeit aus. Bei Betrachtung des Gefäßsystems als Wellenleiter spielt dieser Effekt eine wichtige Rolle [3]. Für das Studium der Strömung in der Nähe einer Stenose ist die Elastizität der Gefäßwand aber irrelevant. Im arteriellen Hauptrohr bleibt nämlich die Radialgeschwindigkeit der Gefäßwand um 2 bis 3 Dekaden kleiner als die mittlere Blutgeschwindigkeit, und diese wiederum ist erheblich kleiner als die Pulswellengeschwindigkeit. Wir betrachten daher das Gefäß als kreiszylindrisches starres Rohr und verwenden einen realitätsnahen integralen Stropuls als periodisches Eingangssignal (Abbildung 5). Man beachte, daß es am Ende der Systole zu einem kurzzeitigen Rückstrom mit relativ geringer Geschwindigkeit in Richtung auf die sich schließende Aortenklappe kommt.

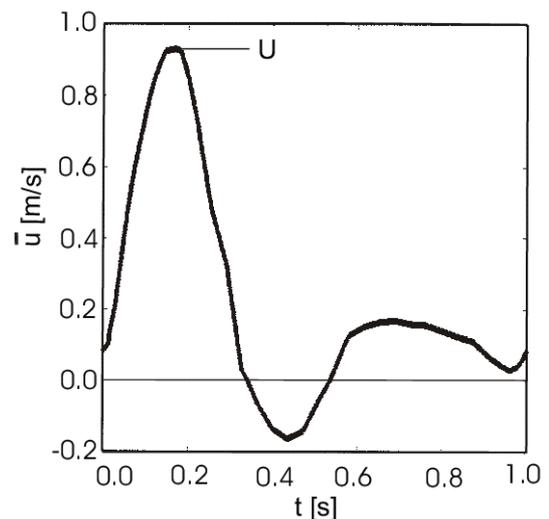


Abb. 5: Zeitlicher Verlauf der querschnittsgemittelten Blutgeschwindigkeit im arteriellen Hauptstrang (Arteria femoralis). Der Stropuls wiederholt sich periodisch mit der Frequenz  $f$  des Herzschlags, hier mit  $f = 60 \text{ min}^{-1}$ .

Bezüglich der Stoffeigenschaften ist zu beachten, daß Blut im wesentlichen aus einem dünnflüssigen Kontinuum, dem Blutplasma, und aus Blutzellen unterschiedlicher Gestalt besteht, die darin suspendiert sind. Die Blutzellen besitzen Abmessungen der Größenordnung  $10 \text{ }\mu\text{m}$  und sind damit um 3 Zehnerpotenzen kleiner als der Durchmesser der Arterien. Zum Studium der Strömung in den großen

Gefäßen ist deshalb eine Stoffbeschreibung als mehrphasige Suspension gar nicht erforderlich. Es genügt das Modell einer einphasigen inkompressiblen Flüssigkeit mit einer Massendichte  $\rho$  von ca.  $1060 \text{ kg/m}^3$ .

Aufgrund seiner inhomogenen Zusammensetzung besitzt Blut nichtlineare phänomenologische Fließeigenschaften. Seine Scherviskosität nimmt nämlich mit zunehmender Deformationsgeschwindigkeit monoton ab, erreicht aber oberhalb von  $100 \text{ s}^{-1}$  einen nahezu konstanten Wert von 3–4 mPas. Für die großen Gefäße ist das der relevante Deformationsbereich. Deshalb können wir das Stoffmodell einer newtonschen Flüssigkeit mit konstanter Viskosität  $\eta$  verwenden. Da es im Körper keine signifikanten Temperaturunterschiede gibt, bleiben thermische Einflüsse auf die Strömung außer Betracht.

Zur Modellbildung gehört auch die Festlegung der Form der Gefäßstenose, die den Untersuchungen zugrunde gelegt werden soll. In Abstimmung mit den Kooperationspartnern an der CAU wird eine axialsymmetrische, im Längsschnitt cosinusförmige Einschnürung mit dem Durchmesser Verhältnis  $d/D = 0,5$  und der relativen Länge  $l/D = 1,5$  gewählt (Abbildung 6). Eine solche Störung der ansonsten zylindrischen Rohrleitung erinnert an eine kurze konvergent-divergente Düse oder eine Blende. Im Gegensatz zu technischen Systemen, wo solche Bauteile in der Regel stationär durchströmt werden, geht es hier um eine instationäre Durchströmung mit stark pulsierendem Fluß.

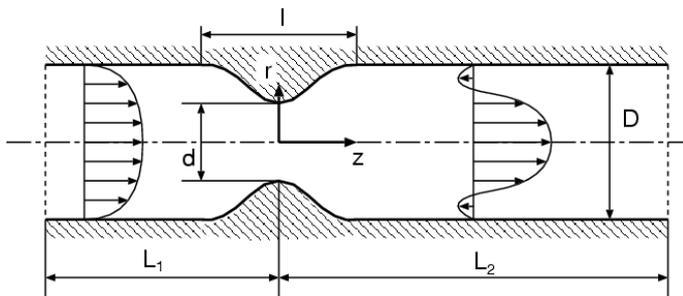


Abb. 6: Geometrie, Koordinaten und axiale Geschwindigkeitsprofile (qualitativ), die bei stationärer Durchströmung zu erwarten wären.

Für den so definierten modellhaften Strömungsprozeß sind zwei Kennzahlen entscheidend:

$$\text{Re} = \frac{\rho U D}{\eta}, \quad S = \frac{\rho f D^2}{\eta}.$$

Die mit der Maximalgeschwindigkeit  $U$  des Strompulses gebildete Reynolds-Zahl  $\text{Re}$  erreicht in den Arterien Werte von ca. 2000, bei denen die ungestörte Rohrströmung noch laminar ist. Die Frequenzzahl  $S$  liegt dabei in der Nähe von 20.

Die Ähnlichkeitsgesetze der Strömungsmechanik verlangen, daß experimentelle Untersuchungen oder numerische Simulationen so angelegt sein müssen, daß die Zahlenwerte dieser dimensionslosen Potenzprodukte

stimmen. Wenn z. B. die Versuchsstrecke im Maßstab 3:2 vergrößert gebaut wird, um die Strömung besser auflösen zu können, und wenn als Versuchsflüssigkeit Wasser verwendet wird, das optisch transparent ist, dessen Viskosität aber viermal kleiner als diejenige des Bluts ist, so muß der Strompuls zeitlich gedehnt und in der Amplitude passend reduziert werden. Genauer: Der Puls der Versuchsanlage muß neunmal langsamer schlagen als das Herz, und das Wasser muß sechsmal langsamer fließen als das Blut in der Arterie. Nur dann besteht dynamische Ähnlichkeit zwischen beiden Prozessen, so daß die Ergebnisse mit einheitlichen Skalierungsfaktoren ineinander umgerechnet werden können.

### 3. Experimentelles Verfahren

Die Erkenntnisse aus der Modellbildung wurden in ein Plexiglasmodell eines arteriellen Blutgefäßes mit einer rotationssymmetrischen Stenose umgesetzt (s. Abbildung 7). Entsprechend den dargestellten Vereinfachungen wurde das Modell auf das Wesentliche reduziert. Da die natürliche Elastizität der Gefäßwand vernachlässigbar ist, konnte die Arterie im Modell durch ein kreiszylindrisches Plexiglasrohr mit einem Innendurchmesser von 10 mm dargestellt werden. Stromauf der Stenose wurde eine Vorlaufänge von 2 m vorgesehen. Damit konnten sämtliche realen Störeinflüsse, die durch Gefäßverzweigungen oder Krümmungen entstehen können, ausgeschlossen werden. Auch der Nachlauf wurde mit 60 cm lang genug gewählt, um Rückwirkungen während der kurzzeitigen Strömungsumkehr zu vermeiden (s. Abbildung 8).

Der instationäre Volumenstrom, der sich aus Abbildung 5 ergibt, wurde durch eine rotierende Verdrängerpumpe realisiert, die eine von der Dichte und der Viskosität der Versuchsflüssigkeit unabhängige Menge liefert. Durch eine elektronische Steuerung konnte genau der gewünschte zeitliche Verlauf der über den Querschnitt gemittelten Anströmgeschwindigkeit eingestellt werden. In Übereinstimmung mit den Ähnlichkeitsbetrachtungen wurden die Geschwindigkeit und die Frequenz jeweils um den Faktor vier verkleinert. Als Versuchsflüssigkeit wurde hier Wasser verwendet, das in einem geschlossenen Kreislauf durch die Versuchsstrecke gefördert wurde.

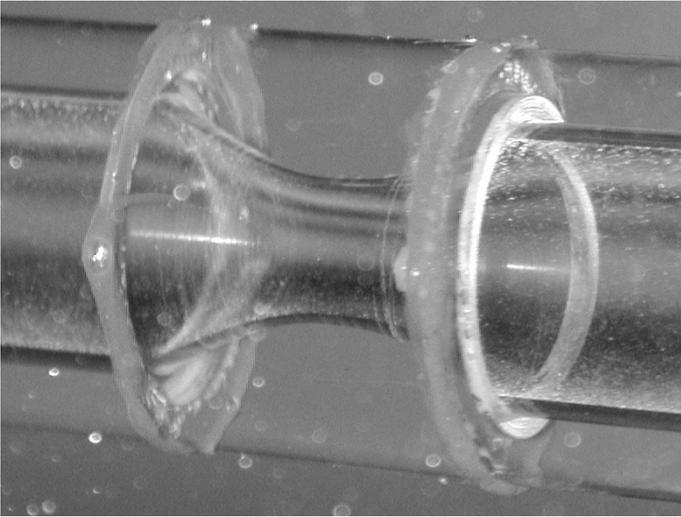


Abb. 7: Modell der Stenose. Das Foto zeigt die cosinusförmige Stenose eingebaut in den Versuchsstand. Die Stenose hat an beiden Enden einen Innendurchmesser von 10 mm und in der Mitte einen kleinsten Innendurchmesser von 5 mm. Die Gesamtlänge beträgt 15 mm.

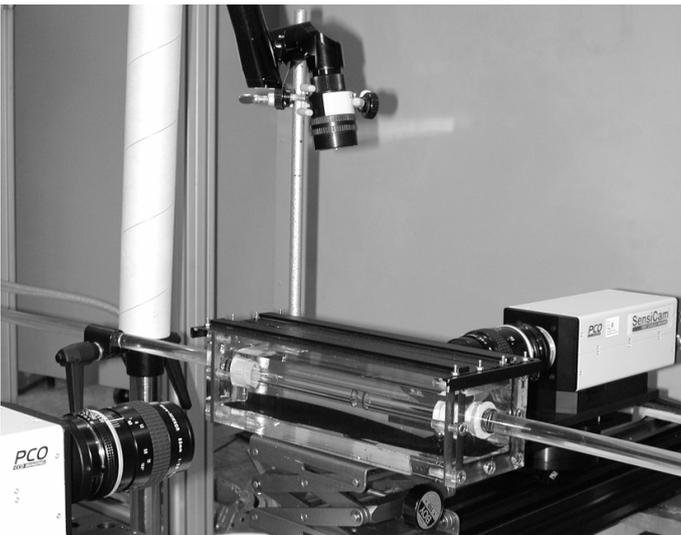


Abb. 8: Zentrale Elemente des Versuchsstandes. Zu erkennen ist das Plexiglasrohr, das im Bereich der Stenose von einem quaderförmigen, mit Glycerin gefülltem Plexiglasbehälter umgeben ist. Dadurch werden Verzerrungen der aufgenommenen Bilder an gewölbten Oberflächen weitgehend vermieden. Links und rechts sind zwei CCD-Kameras zu erkennen, die zwei aneinandergrenzende Gebiete stromab der Stenose aufnehmen. Am oberen Bildrand sieht man die Optik zur Erzeugung des Lichtschnitts.

Für den experimentellen Teil dieser Untersuchung wird mit der Particle Image Velocimetry (PIV) ein Strömungsgeschwindigkeitsmeßverfahren eingesetzt, das sich in vorhergehenden Untersuchungen vielfach bewährt hat [8]. Die besondere Stärke der PIV ist die Möglichkeit, das Geschwindigkeitsfeld innerhalb einiger Millisekunden in einer ganzen Ebene erfassen zu können. Ein PIV-System besteht im wesentlichen aus den

Komponenten Laser, Synchronisator, CCD-Kamera und Personal-Computer (s. Abbildung 9).

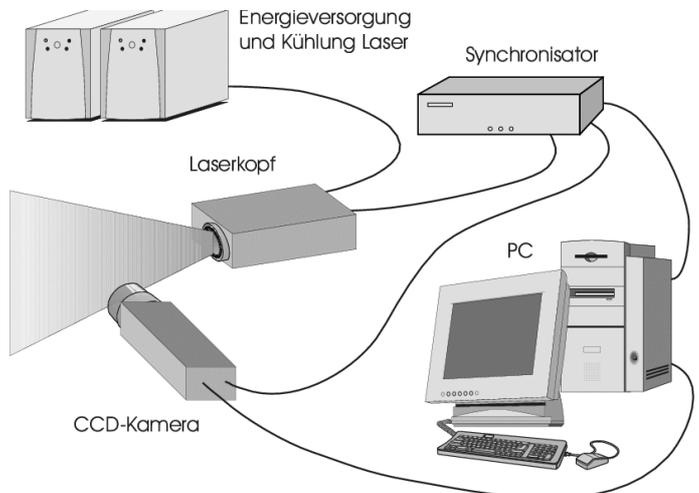


Abb. 9: Schematische Darstellung der Komponenten eines PIV-Systems.

Das Prinzip der PIV beruht auf der Beobachtung kleiner Partikel, die dem strömenden Fluid zugesetzt werden oder auch schon in ihm enthalten sein können. Die Partikel werden durch einen Laserlichtschnitt angestrahlt, und das von ihnen reflektierte Licht wird zu zwei kurz aufeinander folgenden Zeitpunkten mit einer oder mehreren CCD-Kameras aufgenommen. Mit geeigneten Algorithmen werden Teilbilder mathematisch ausgewertet, um die Partikelverschiebung zwischen den beiden Belichtungen zu bestimmen. Man erhält auf diese Weise viele lokale Verschiebungsvektoren, die mit der Zeitdifferenz, welche zwischen den beiden Bildern liegt, in Geschwindigkeitsvektoren umgerechnet werden. Als Ergebnis erhält man so eine *vector-map* von zweidimensionalen Geschwindigkeitsvektoren, die in der beleuchteten Ebene liegen (s. Abbildung 10). Aus diesen Primärdaten lassen sich im *Postprocessing* einige Komponenten des Geschwindigkeitsgradiententensors ableiten. Für diese Untersuchung wird insbesondere eine Komponente des Wirbelvektors betrachtet (s. Abbildung 11). Sie zeigt die lokale Winkelgeschwindigkeit an, mit der die Fluidelemente rotieren.

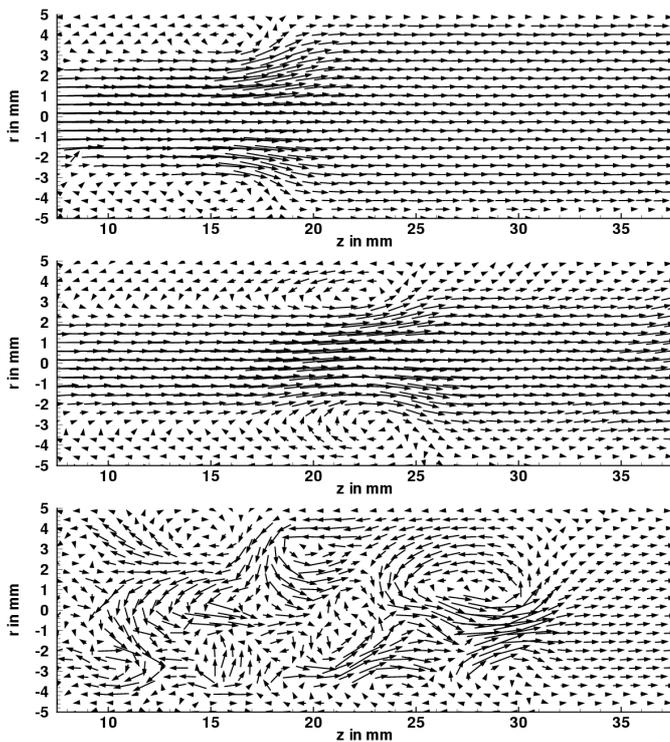


Abb. 10: Geschwindigkeitsfelder im Meridianschnitt des Gefäßmodells bei  $Re=2325$  und  $S=25$ . Der Austrittsquerschnitt der Stenose liegt bei  $z=7,5$  mm. Oben: während der Beschleunigungsphase bei  $t=0,07$ ; Mitte: während der Verzögerungsphase bei  $t=0,2575$ ; unten: im unteren Totpunkt bei  $t=0,445$ .

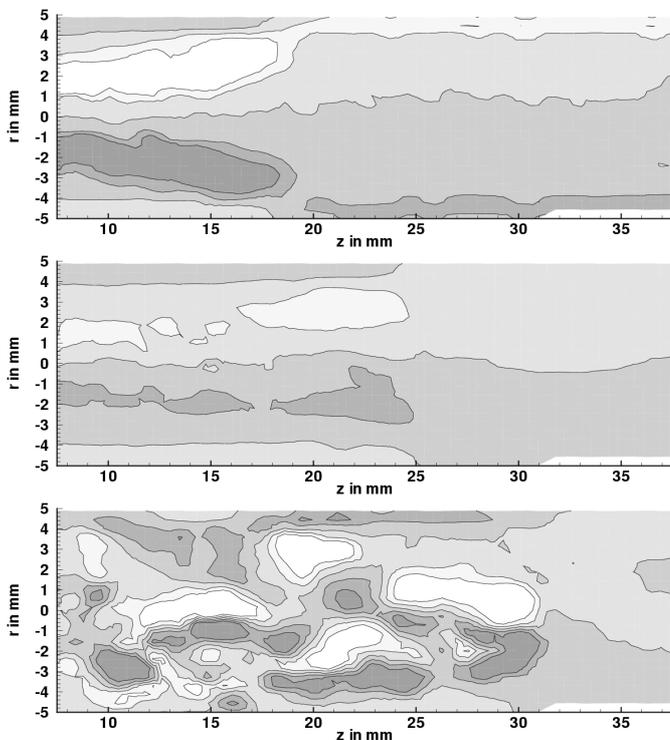


Abb. 11: Konturplot der Wirbelvektorkomponente, die senkrecht auf dem Meridianschnitt steht. Die Kennzahlen und die Zeitpunkte sind dieselben wie in Abbildung 10.

## Ergebnisse

Die Auswertung der Messungen läßt erkennen, daß während der Beschleunigungsphase das Fluid ähnlich einem Freistrahls durch die Stenose strömt. Hinter der Stenose bildet sich in Wandnähe ein Totwassergebiet aus, dessen Ausdehnung ungefähr eine Stenosenlänge beträgt. Insgesamt weist die Strömung kaum Radialkomponenten auf und ist rotationssymmetrisch. Das wird auch an der Wirbelstärke deutlich, die bei einem Vorzeichenwechsel an der Linie  $r=0$  mm symmetrisch verteilt ist.

In der Verzögerungsphase sieht das Strömungsbild recht ähnlich aus. Allerdings strömt das Fluid hier gegen steigenden Druck an. Das hat zur Folge, daß in den Randbereichen die Strömung ablöst und dort eine Strömungsumkehr einsetzt. Wirbel, die bereits stromab geflossen sind, werden in dieser Phase zurücktransportiert.

Die Ergebnisse für den unteren Totpunkt legen die Vermutung nahe, daß die Strömung verzögert auf die Druckinversion reagiert und der zuvor deutlich erkennbare Freistrahls instabil wird. Die Axialsymmetrie ist aufgehoben, und es finden sich unregelmäßig verteilte Wirbelsysteme.

## 4. Numerische Simulation

Eine methodische Alternative zur experimentellen Untersuchung ist die numerische Simulation der dreidimensionalen pulsierenden Strömung. Den Ausgangspunkt bilden dabei die Navier–Stokesschen Bewegungsgleichungen in Verbindung mit der kinematischen Zwangsbedingung der Inkompressibilität, ein System nichtlinearer partieller Differentialgleichungen, das unter Beachtung sachgerechter Randbedingungen gelöst werden muß. Unter der Annahme, daß sich in der rotationssymmetrischen Geometrie auch eine rotationssymmetrische drallfreie Strömung einstellt, besteht das vektorielle Geschwindigkeitsfeld aus zwei Komponenten  $v_z$  und  $v_r$ , die von den Koordinaten  $z$  und  $r$  (mit Ursprung in der Mitte der Stenose, s. Abbildung 6) sowie von der Zeit  $t$  abhängen. Im Gegensatz zur PIV wird bei einer Strömungssimulation simultan zu den Geschwindigkeitskomponenten  $v_z(z, r, t)$  und  $v_r(z, r, t)$  auch das Druckfeld  $p(z, r, t)$  mitberechnet.

Um die Zahl der unabhängigen Parameter zu minimieren, beziehen wird zweckmäßigerweise die Koordinaten auf den Gefäßdurchmesser  $D$ , die Zeit auf die Periodendauer  $T^{-1}$ , die Geschwindigkeitskomponenten auf die Maximalgeschwindigkeit  $U$  und den Druck auf  $\eta U/D$ , behalten aber der Einfachheit halber für die so normierten Größen die Bezeichnungen  $z, r, t, v_z, v_r$  und  $p$  bei. Dann erscheinen die oben definierten Kennzahlen  $S$  und  $Re$  als Faktoren in den Beschleunigungstermen der Bewegungsdifferentialgleichungen (Abbildung 12). Das Berechnungsgrundgebiet erstreckt sich nicht nur über die Engstelle, sondern enthält auch noch hinreichend lange zylindrische Abschnitte vor und hinter der Stenose ( $L_1 = 5D, L_2 = 15D$ ), so daß strömungstechnisch saubere Ein- und Ausströmrandbedingungen formuliert werden

können. Die Geschwindigkeitsverteilung  $u(r,t)$  im Einströmquerschnitt muß vorab als Lösung einer Diffusionsgleichung so bestimmt werden, daß sich bei Mittelung über den Querschnitt die Pulsfunktion  $\bar{u}(t)$  ergibt.

### Bewegungsgleichungen

$$S \frac{\partial v_r}{\partial t} + \text{Re} \left( v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}$$

$$S \frac{\partial v_z}{\partial t} + \text{Re} \left( v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}$$

### Kontinuitätsgleichung

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

### Randbedingungen

an der Gefäßwand:  $v_r = 0, v_z = 0$   
 auf der Achse ( $r = 0$ ):  $v_r = 0, \partial v_z / \partial r = 0$   
 im Einströmquerschnitt ( $z = -L_1$ ):  $v_r = 0, v_z = u(r, t)$   
 im Ausströmquerschnitt ( $z = L_2$ ):  $v_r = 0, -p + \partial v_z / \partial z = 0$

### Differentialgleichung für $u(r,t)$ bei Vorgabe von $\bar{u}(t)$

$$S \frac{\partial (u - \bar{u})}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - 4 \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=0,5}$$

Abb. 12: Das nichtlineare Randwertproblem zur simultanen Berechnung der beiden Geschwindigkeitsfelder  $v_z(z, r, t)$ ,  $v_r(z, r, t)$  und des Druckfelds  $p(z, r, t)$ .

Über die grundsätzliche Bedeutung numerischer Strömungssimulationen und über den Weg vom theoretischen Modell zu einer finiten Approximation wurde in einer früheren Ausgabe dieser Zeitschrift berichtet [2]. So genügt es hier, die einzelnen Schritte einer angemessenen numerischen Methode nur summarisch zu nennen: Überführung des Randwertproblems in eine schwache integrale Form, räumliche Diskretisierung durch finite Elemente, Gewichtung der Residuen im Sinne von Galerkin, zeitliche Diskretisierung durch ein implizites Einschrittverfahren, Auswertung räumlicher Integrale durch Gaußsche Quadratur, in jedem Zeitschritt iterative Lösung des nichtlinearen algebraischen Gleichungssystems für die Knotenvariablen, Erzeugung der eingeschwungenen Lösung aus dem Ruhezustand heraus.

An unserem Institut ist ein Rechenprogramm auf dieser Basis verfügbar, das hier entwickelt wurde [5]. In einer Studienarbeit wurde damit die Stenosenströmung simuliert [4]. Nach Abschluß der eigentlichen Berechnungen sind die Druck- und Geschwindigkeitswerte an allen Knoten des FE-Netztes bekannt, und es geht dann darum, die großen Datenmengen geeignet zu visualisieren. Der

zeitabhängige mehrdimensionale Prozeß kann am besten in einer computeranimierten Darstellung veranschaulicht und interpretiert werden. Dort wird deutlich, wie die Strömung hinter der Einschnürung ablöst. Die wandnahen Wirbel werden phasenweise mitgerissen, nach der Inversion des Druckgradienten aber wieder partiell zurückgespült. In einer Druckschrift läßt sich das nur unvollkommen anhand einiger ausgewählter Momentaufnahmen des Eulerschen Geschwindigkeitsfelds darstellen (Abbildung 13).

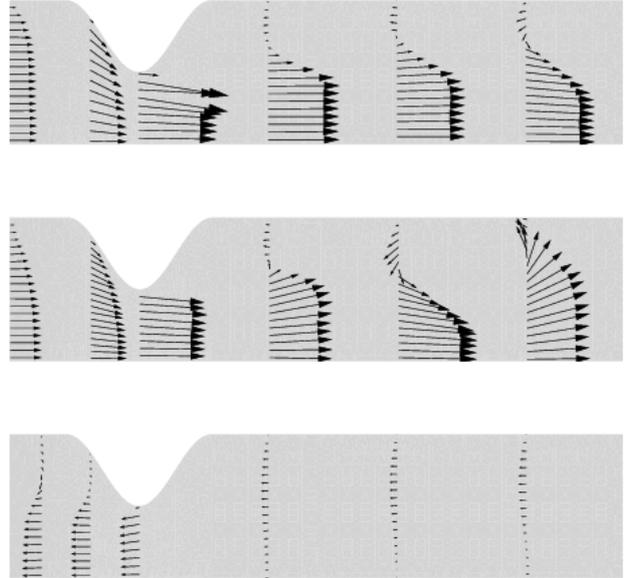


Abb. 13: Geschwindigkeitsvektoren in ausgewählten Querschnitten zu verschiedenen Zeiten für  $Re = 1740$  und  $S = 14$ . Oben: in der Beschleunigungsphase bei  $t = 0,10$ ; Mitte: in der Verzögerungsphase bei  $t = 0,24$ ; unten: in der Rückströmungsphase bei  $t = 0,44$ . Es wird nur die Hälfte eines Längsschnitts gezeigt. Die Geometrie ist in radialer Richtung dreifach überhöht.

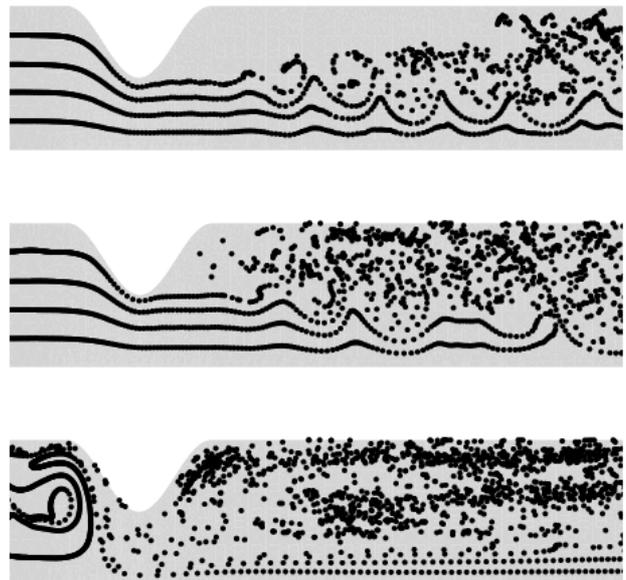


Abb. 14: Momentaufnahmen von vier diskretisierten Streichlinien in den Zeitpunkten  $t = 0,14$  (oben),  $t = 0,24$  (Mitte) und  $t = 0,38$  (unten). Die Kennzahlen sind dieselben wie in Abbildung 13.

Aufschlußreich ist auch eine Visualisierung der Strömung in Lagrangescher Betrachtungsweise. Abbildung 14 zeigt die Lage materieller Punkte, die in kurzen Zeitabständen an vier ausgewählten Positionen im Einströmquerschnitt (links weit außerhalb des Bildausschnitts) markiert wurden. In dieser Darstellung werden z. B. das Aufrollen der instabilen Scherschicht und der chaotische Charakter des dynamischen Systems deutlich.

In der Literatur gibt es Hinweise darauf, daß bei der Bildung von Stenosen räumliche und zeitliche Gradienten der Schubspannung an der Gefäßwand eine Rolle spielen [1]. Abbildung 15 zeigt den zeitlichen Verlauf der (mit  $\eta U/D$  normierten) Wandschubspannung an verschiedenen Positionen vor, innerhalb und hinter der Einschnürung während eines Zyklus. Ohne die Verengung würden alle vier Signale zusammenfallen. Bedeutsam sind nicht nur die unterschiedlichen Amplituden und Phasen, sondern auch die schnellen Änderungen in einigen Spannungsverläufen, die das Vorbeilaufen von Wirbeln widerspiegeln.

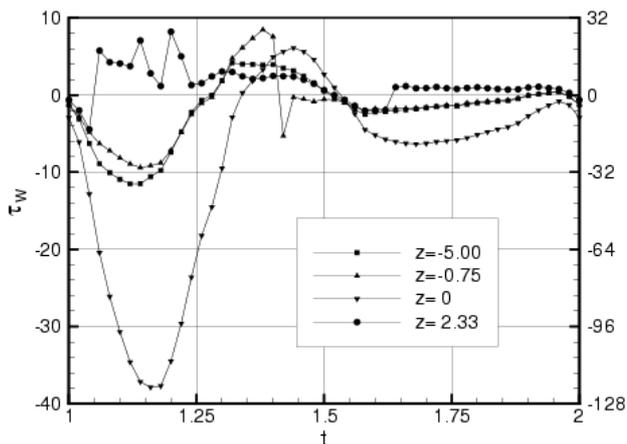


Abb. 15: Zeitlicher Verlauf der normierten Wandschubspannung an verschiedenen Positionen. Für die engste Stelle ( $z = 0$ ) gilt die Skala auf der rechten Seite. Die Kennzahlen sind dieselben wie in Abbildung 13.

## 5. Ausblick

Die Ergebnisse der Experimente und der numerischen Simulation zeigen, daß die Strömung im Bereich einer stenotischen Verengung in einer Arterie aufgrund des stark zeitabhängigen Zuflusses äußerst komplex ist. Besonders im Nachlauf der Stenose sind ihre Auswirkungen stromab sehr weit festzustellen. Aber auch stromauf der Stenose sind während der – wenn auch kurzen und nicht sehr intensiven – Strömungsumkehr deutliche Effekte zu erkennen.

Der Vergleich der experimentell und der numerisch gewonnenen Daten macht deutlich, daß es durchaus sinnvoll ist, die gleiche Problemstellung mit zwei komplementären Methoden zu behandeln. Die experimentellen Ergebnisse in der Nähe des unteren Totpunktes deuten darauf hin, daß es notwendig ist, die

in der Simulation angenommene Axialsymmetrie kritisch zu hinterfragen.

Weitere Untersuchungen sollen mit dem Ziel durchgeführt werden, die Einflüsse verschiedener Stents auf die Strömung zu charakterisieren. Dazu wird in Abstimmung mit den Partnern der CAU eine repräsentative Auswahl von Stents getroffen. Diese werden in das Versuchsmodell der Stenose eingesetzt; inwieweit sich die feine Struktur der Stents auch in der numerischen Simulation abbilden läßt, wird erst durch eine Abschätzung des Rechenaufwandes zu klären sein, der dann erheblich größer sein wird.

## 6. Literatur

- [1] Berger, S. A. and L.-D. Jou: Flows in stenotic vessels. Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 32 (2000) 347–382
- [2] Böhme, G. und L. Rubart: Numerische Strömungssimulation. Uniforschung: Forschungsmagazin der Universität der Bundeswehr Hamburg 2 (1992) 6–15
- [3] Ku, D. N.: Blood flow in arteries. Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 29 (1997) 399–434
- [4] Le Ruyet, F.: Numerische Simulation der pulsierenden Strömung in einer Stenose. Studienarbeit, Universität der Bundeswehr Hamburg, 2000
- [5] Lund, C.: Ein Verfahren zur numerischen Simulation instationärer Strömungen mit nichtlinear-viskosen Fließeigenschaften. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 7 (Strömungstechnik), Nr. 344, VDI-Verlag, Düsseldorf 1998
- [6] Müller-Hülsbeck, S., H. Schwarzenberg, F. Wesner, R. Drost, C.-C. Glüer and M. Heller: Visualization of flow patterns from stents and stent-grafts in an in vitro flow-model. Investigative Radiology 33 (1998) 762–770
- [7] Moser, K. W., E. C. Kutter, J. G. Georgiadis, R. O. Buckins, H. D. Morris and J. R. Torczynski: Velocity measurements of flow through a step stenosis using magnetic resonance imaging. Experiments in Fluids 29 (2000) 438–447
- [8] Pust, O.: Particle Image Velocimetry – Ein neues Geschwindigkeitsmeßverfahren in der Strömungsmechanik. Uniforschung: Forschungsmagazin der Universität der Bundeswehr Hamburg 9 (1999) 69–77
- [9] Schmidt, R. F. und G. Thews (Hrsg.): Physiologie des Menschen. Springer-Verlag, Berlin 1995 (26. Auflage)