

STABILITÄTSANALYSE EXPERIMENTELLER DATEN MIT DER DYNAMIC MODE DECOMPOSITION

STABILITY ANALYSIS OF EXPERIMENTAL DATA USING DYNAMIC MODE DECOMPOSITION

Oliver Pust und Peter J. Schmid

Dantec Dynamics A/S, DK-2740 Skovlunde, DENMARK

Laboratoire d'Hydrodynamique, CNRS-Ecole Polytechnique, F-91128 Palaiseau, FRANCE

Dynamic Mode Decomposition, globale und dynamische Moden, Stabilitätsanalyse

Dynamic Mode Decomposition, global and dynamic modes, stability analysis

Zusammenfassung

Die Dynamic Mode Decomposition (DMD) ist eine neuartige Technik, um dynamische Informationen aus zeitaufgelösten experimentellen (oder numerischen) Daten zu extrahieren. Sie basiert auf der Snapshot-Methode und kann sowohl auf Particle-Image-Velocimetry-Daten als auch auf bildbasierte Visualisierungen angewendet werden.

Die Beschreibung und die Analyse des dynamischen Verhaltens von Fluidströmungen ist das Ziel experimenteller und numerischer Untersuchungen in der fluiddynamischen Forschung. Während für numerische Simulationen eine große Anzahl von Algorithmen zur Verfügung steht, um diese Informationen zu gewinnen, existieren keine gleichwertigen Methoden für experimentelle Untersuchungen. Der Grund dafür liegt in der Abwesenheit eines Modells (im Fall der CFD die diskretisierten Navier-Stokes-Gleichungen), auf dem die Analyse und die damit verbundenen Algorithmen basieren. Stattdessen muss die Analyse experimentell gewonnener Ergebnisse rein datenbasiert stattfinden. Dies hat in der Vergangenheit zu verschiedenen statistischen Werkzeugen zur Beschreibung des Fluidverhaltens geführt. Die Dynamic Mode Decomposition schließt diese Lücke zwischen modellbasierten und datenbasierten Analysetechniken, indem sie die dynamische Beschreibung des gemessenen Strömungsverhaltens nur auf den gemessenen Daten basierend berechnet.

Die Dynamic Mode Decomposition unterscheidet sich signifikant von der Proper Orthogonal Decomposition (POD), da sie die zeitlichen und räumlichen Strukturen erfasst, die für die Dynamik der Strömung am bedeutendsten sind. Die Proper Orthogonal Decomposition hingegen liefert eine Hierarchie von räumlichen Strukturen (sortiert nach ihrem Energieinhalt), die die Strömungsfelder in einem statistischen Sinn repräsentiert. Die zeitliche Komponente hingegen geht verloren, da die POD den zeitgemittelten räumlichen Korrelationstensor verwendet.

Darüber hinaus ist der Energieinhalt in vielen Anwendungen ein schlechter Indikator für die dynamisch relevanten Strukturen.

Einleitung

Eine objektive und quantitative Beschreibung des Strömungsverhaltens ist das Ziel vieler wissenschaftlicher – sowohl numerischer als auch experimenteller – Untersuchungen. Ein tiefgehendes Verständnis aller relevanten Prozesse bildet auch die Basis für den Transfer von grundlegenden Strömungsphänomenen in technische Applikationen und fluidtechnische Apparate. Experimente und numerische Simulationen sind die zwei Pfeiler, auf denen dieser Transfer beruht. In der Numerik hat die ständig steigende Rechenkapazität die Analyse auch komplexer Strömungen hinsichtlich ihrer globalen Stabilität, Rezeptivität und Kontrollierbarkeit ermöglicht [2, 5, 10]. Moderne Techniken, meistens Adaptionen von schnellen iterativen Algorithmen für Probleme der linearen Algebra, werden weithin in vielen Berechnungen großskaliger, gekoppelter physikalischer Prozesse angewendet. Auf der experimentellen Seite sind bemerkenswerte Fortschritte bei der quantitativen Messung von Strömungsgrößen erzielt worden. Insbesondere die Particle Image Velocimetry (PIV) wurde und wird immer leistungsfähiger. Der Grad der räumlichen und zeitlichen Auflösung braucht den Vergleich mit numerischen Simulationen nicht zu scheuen. Darüber hinaus hat der Einsatz von Kameras mit mehreren Kilohertz Bildwiederholrate und entsprechenden Lasern bisher ungeahnte Einblicke in schnell ablaufende Strömungsvorgänge erlaubt. Im Vergleich mit numerischen Simulationen bleibt die quantitative Auswertung der gemessenen Daten aber weit hinter den Möglichkeiten für numerische Ergebnisse zurück. Der Grund liegt in den oben erwähnten Algorithmen. Fast alle in der quantitativen Fluidodynamik gebräuchlichen Algorithmen stützen sich auf eine Modellgleichung – gewöhnlich die (linearisierten) Navier-Stokes-Gleichungen und ihre Varianten. Dieses Modell erscheint in den Algorithmen als eine Matrix-Vektor-Multiplikation, die entscheidend für die Aufrechterhaltung der Orthogonalität oder die Robustheit der Methode ist [5]. Die notwendige Modellinformation kann in einem numerischen Verfahren leicht bereitgestellt werden, sie ist aber in experimentellen Messungen unzugänglich. In physikalischen Experimenten sind alleine die Messdaten vorhanden. Um denselben Grad an quantitativer Beschreibung des Strömungsprozesses zu erzielen, müssen die gebräuchlichen Algorithmen modifiziert werden, um ihre Abhängigkeit von einem Modell zu eliminieren und ihre Eingaben auf Daten alleine zu beschränken. Die Dynamic Mode Decomposition [8, 9] erreicht dieses Ziel, indem die relevante Dynamik aus einer Messdatensequenz extrahiert wird. Ähnlich wie beim Arnoldi-Algorithmus wird ein Matrix-Polynom hoher Ordnung an die Datensequenz angepasst. Eine Übertragungsfunktion zwischen den Snapshots wird dann bestimmt, die als niedrig-dimensionale Approximation der Systemdynamik aufgefasst werden kann. Die Eigenwerte und Eigenvektoren dieser Übertragungsfunktion beschreiben somit die prinzipielle Dynamik, die in der Snapshot-Basis enthalten ist.

Hintergrund

Die Dynamic Mode Decomposition basiert auf einer zeitaufgelösten Sequenz von Strömungsfeldmessungen. Diese Messungen können Visualisierungen eines passiven Tracers oder PIV-Messungen sein. Jedes instantane Strömungsfeld wird durch einen Vektor $\vec{v}$ beschrieben und

eine Sequenz von Snapshots wird dargestellt als

$$\vec{V}_1^N = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_N\}.$$

Unter Anwendung einer linearen Tangenten-Approximation wird eine lineare Abbildung A von Snapshot zu Snapshot angenommen, die als konstant (oder quasi-konstant) über die Datensequenz hinweg betrachtet wird.

$$\vec{v}_{j+1} = A\vec{v}_j.$$

Folgt man der Idee, die den Krylov-Techniken zugrunde liegt, insbesondere der Arnoldi-Methode [4, 11], beschreiben und approximieren wir die lineare Abbildung A durch eine $N - 1$ -dimensionale Snapshot-Basis $\vec{V}_1^{N-1}$. Dieser Schritt kann dargestellt werden als

$$A\vec{V}_1^{N-1} \approx \vec{V}_1^{N-1}S,$$

mit S als *Companion*-Matrix, die die Snapshots 1 bis $N - 1$ über ihre Subdiagonaleinträge verschiebt und den letzten Snapshot N durch eine Linearkombination der vorhergehenden $N - 1$ Snapshots annähert [6]. Es ist daher notwendig, die letzte Messung bestmöglich durch eine Linearkombination der vorhergehenden Messungen auszudrücken. Diese Prozedur liefert als Ergebnis die niedrig-dimensionale Systemmatrix S . Nun ist bekannt, dass die Eigenwerte von S , die auch als Ritz-Werte bezeichnet werden, einige der Eigenwerte der vollen Systemmatrix A annähern. Die assoziierten Eigenvektoren von S stellen die Koeffizienten einer Linearkombination bereit, die notwendig ist, um die modalen Strukturen innerhalb der Snapshot-Basis auszudrücken.

Es ist wichtig festzuhalten, dass an keinem Punkt der oben beschriebenen Prozedur eine explizite Form der Systemmatrix A benötigt wurde. Nur ihr niedrig-dimensionaler Vertreter, der allein aus den Messdaten bestimmt werden kann, wird benötigt. Diese Eigenschaft ist entscheidend dafür, eine iterative Stabilitätstechnik auf ein rein messdatenbasiertes Verfahren übertragen zu können. Ein weiterer Vorteil liegt in der Möglichkeit, auch (räumlich) begrenzte Daten auswerten zu können [9]. In vielen realen Anwendungen treten mehrere Strömungsregime und Instabilitätsmechanismen gleichzeitig auf. Bei dem Beispiel eines querangeströmten Freistrahls [1] koexistieren Kelvin-Helmholtz-Instabilitäten gegensinnig rotierender Wirbel mit Nachlaufwirbeln und dem Zusammenbruch von Hufeisenwirbeln. Diese lokalen Instabilitäten agieren auf unterschiedlichen Zeitskalen und sind durch eine globale Stabilitätsanalyse nur schwer zu extrahieren und zu separieren. Dennoch kann die DMD die Systemmatrix S für jeden Instabilitätsmechanismus individuell identifizieren und daher die dominanten dynamischen Eigenschaften effektiv und effizient repräsentieren, indem die Messungen nur aus den jeweiligen räumlichen Regionen berücksichtigt werden.

Sogar die Analyse von sich räumlich entwickelnden Störungen ist möglich [7, 9]. In diesem Fall werden zwar zeitaufgelöste Feldmessungen vorgenommen, aber der räumlich-zeitliche Datenraum $V(x, y, t)$ wird so transformiert, dass jeder Snapshot ein (y, t) -Feld an einem gegebenen Ort in x -Richtung darstellt. Durch Anordnung vieler Snapshots in x -Richtung können wir eine räumliche Sequenz von Datenfeldern erzeugen. Lässt man diese Datensequenz durch eine DMD-Analyse laufen, erhält man eine niedrig-dimensionale Repräsentation S der räumlichen Evolutionsmatrix A , die die Abbildung von einem Snapshot im Raum zum nächsten beschreibt. Dementsprechend ergibt die Eigenwertzerlegung von S räumliche Stabilitätsinformationen.

Anwendung

Die DMD wird auf eine bildbasierte Visualisierung eines laminaren, axialsymmetrischen Freistrahls angewendet. Ein Wasserfreistrahling dringt bei niedriger Reynoldszahl ohne Drall in ruhendes Wasser ein. Es entwickelt sich eine axialsymmetrische Wirbelebene, die sich stromab einer Kelvin-Helmholtz-Instabilität folgend aufrollt [3]. Wegen der niedrigen Geschwindigkeit wurden keine dreidimensionalen Effekte beobachtet, und die Strömung wird dementsprechend als axialsymmetrisch im beobachteten Bereich angenommen.

Snapshots einer Bildsequenz werden durch eine Videokamera bei 25 Hz aufgenommen. Diese Snapshots werden dann zu Graustufenbildern digitalisiert, die die Verteilung eines passiven Farbstofftracers abbilden. Einige dieser Rohbilder werden in Abbildung 1 gezeigt. Sie zeigen das typische Aufrollen der äußeren Scherschicht aufgrund von Kelvin-Helmholtz-Instabilitäten. Sogar in dieser kurzen Sequenz ist die kombinierte konvektive und diffusive Natur der Instabilität deutlich sichtbar. Trotzdem stellen die Bilder an sich kein objektives und quantitatives Maß dar, um Einsichten in die vorherrschende Dynamik der Störungen zu gewinnen. Außerdem können nur die dominantesten Eigenschaften beobachtet werden, während feinere und kleinskaligere Instabilitäten übersehen werden. Aus diesem Grund wenden wir die DMD wie oben beschrieben an. Jedes Bild wird in einen Spaltenvektor umgewandelt; aus diesen Vektoren (von 50 Bildern) wird eine rechteckige Matrix gebildet, die die Matrix $\vec{V}_1^N$ mit $N = 50$ darstellt. Danach wird die Systemmatrix S extrahiert. Ihre Eigenwerte geben ein quantitatives Bild der zugrunde liegenden temporalen Störungsdynamik. Die räumlichen Eigenschaften, die mit den identifizierten Eigenwerten korrespondieren, werden in Abbildung 2 gezeigt.

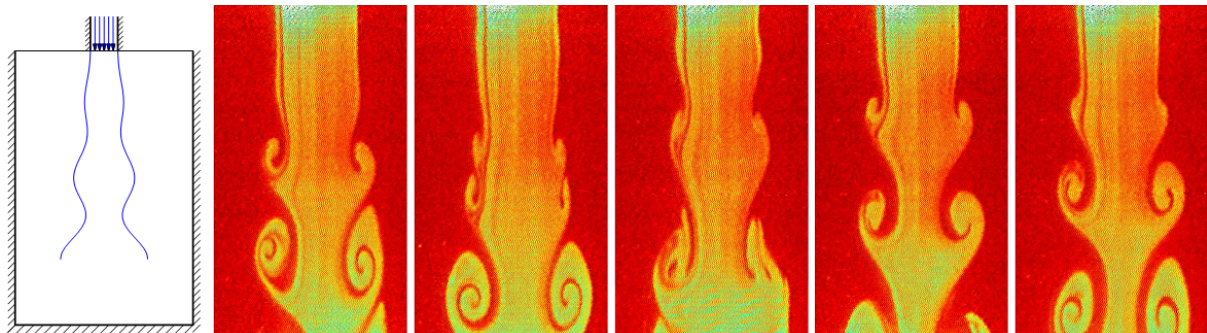


Abbildung 1: Skizze des Versuchsaufbaus und selektierte, repräsentative Snapshots aus dem Experiment.

Typischerweise tritt bei einer DMD-Analyse ein Eigenwert im Ursprung auf (Nummer 1 im Spektrum in Abbildung 2). Dieser Eigenwert, der kein Wachstums- oder Schwingungsverhalten aufzeigt, berücksichtigt einen zeitlichen Mittelwert, der in der Datensequenz enthalten ist. Als solcher repräsentiert er die mittlere Strömung oder die zeit-invariante Komponente der Strömung. Da ihm keine weiteren nützlichen Informationen entnommen werden können, wird auf die Abbildung der entsprechenden räumlichen Struktur verzichtet.

Interessantere Strömungsstrukturen sind in den höheren Moden enthalten. Diese Moden stellen die Dynamik der Störungen dar. Der erste DMD-Mode (Abbildung 2 ($2r, 2i$)), der in der Scherschicht lokalisiert ist, zeigt ein charakteristisches Muster, das das Aufrollen des axialsymmetrischen Wirbels und den resultierenden Entrainmentprozess ruhenden Fluids in den

Freistrahls darstellt. Der Real- und der Imaginärteil der Modenstruktur sind aufgrund der Phasendifferenz von 90° gegeneinander versetzt. Eine klare räumliche Längenskala in Strömungsrichtung ist sichtbar, die in eine korrespondierende (lokale) Wellenzahl in der Axialkoordinate umgerechnet werden kann.

Der zweite Mode in Abbildung 2 (3r,3i) zeigt noch feinere Strukturen. Zusätzlich zu einer stärkeren Neigung der kohärenten Strukturen kann eine etwas kleinere Skala in axialer Richtung beobachtet werden. Dieser Mode erstreckt sich in axialer Richtung nahezu über das ganze Beobachtungsfenster und zeigt sogar noch in der Nähe der Düse Struktur. Auch hier sieht man wieder den typischen Versatz zwischen Real- und Imaginärteil. Der korrespondierende Eigenwert dieses dynamischen Modes weist eine höhere zeitliche Frequenz auf; diese Tendenz stützt die Tatsache, dass die DMD erfolgreich eine Dispersionsbeziehung des Strömungsfeldes aus der Datensequenz extrahiert hat. Der nächsthöhere Mode in Abbildung 2 (4r,4i) weist noch feinere Strukturen auf, die wiederum in Gebieten maximaler Scherung konzentriert sind. Signifikante Strukturen sind nahe der Düse sichtbar. Die räumliche Struktur zeigt kleine bis mittelgroße Skalen weiter stromab der Düse. Dies unterstreicht die Beobachtung, dass kleinskalige Strukturen weiter stromab in axialer Richtung erscheinen. Der korrespondierende Eigenwert besitzt wie erwartet eine größere zeitliche Frequenz.

Der fünfte und letzte dynamische Mode ist in Abbildung 2 (5r,5i) zu sehen. Er weist eine höhere Frequenz und nahezu neutrales Stabilitätsverhalten auf. Es kann also erwartet werden, dass dieser Mode während des gesamten bearbeiteten Zeitintervalls beobachtet werden kann.

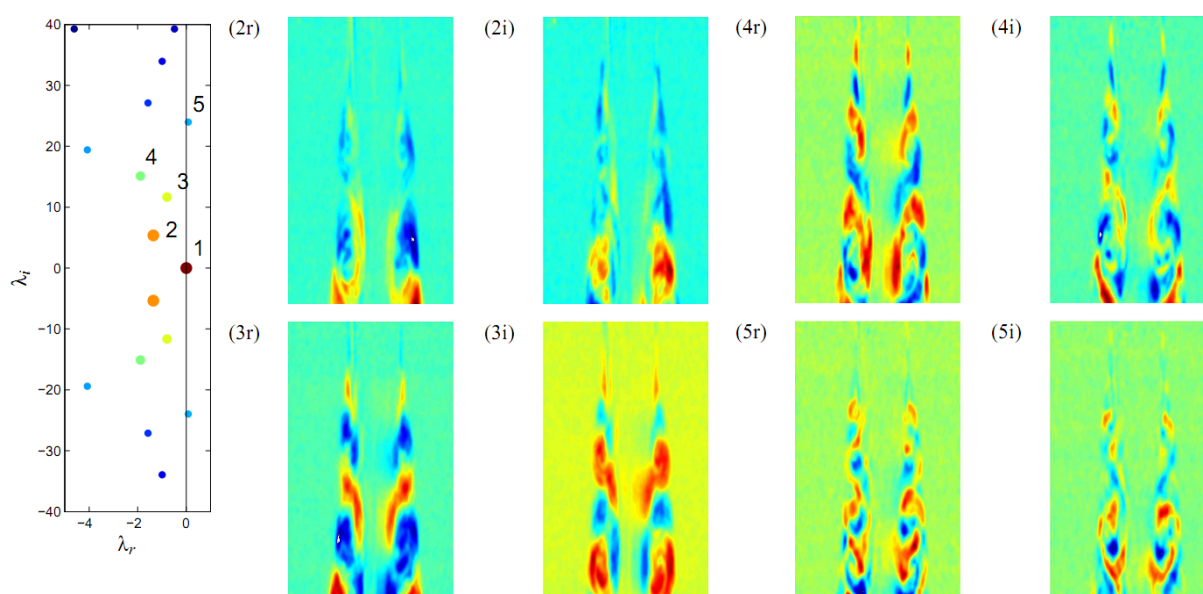


Abbildung 2: Dynamische Moden (Real- und Imaginärteil, rechts), korrespondierend zu dem DMD-Spektrum (links).

Die mäßigen Strömungsgeschwindigkeiten in diesem Freistrahlexperiment machen die Zerlegung in dynamische Moden via DMD und deren Interpretation relativ einfach. Für Strömungen mit hohen Geschwindigkeiten mag dies wegen der Präsenz sehr kleinskaliger, inkohärenter Fluidelemente zunehmend schwieriger werden. Trotzdem ist die DMD in der Lage, die dynamisch relevantesten Strukturen in einem optimalen Sinne zu identifizieren und zu extrahieren. Die Relevanz der Strukturen unter den vielen identifizierten Moden kann durch die Berechnung

eines auf der POD-Theorie basierten Kohärenzmaßes weiter quantifiziert werden. Auf dieser Weise ist es möglich, inkohärente – das heißt durch Rauschen kontaminierte – Strukturen zu erkennen und auf die kohärenteren Fluidelemente und ihre zeitliche Dynamik zu fokussieren. Dieses Kohärenzmaß wurde auf das Spektrum in Abbildung 2 angewendet. In ihm variieren die Eigenwerte in Farbe (von rot nach blau) und Größe in Abhängigkeit der Kohärenz des entsprechenden dynamischen Modes.

Es ist erwähnenswert, dass in unserem Fall das extrahierte Spektrum symmetrisch in Hinblick auf die zeitliche Frequenz ist. Dies ist eine Folge der Verarbeitung von reellwertigen Daten, die entweder rein reelle (nicht oszillierende) Eigenwerte oder konjugiert-komplexe Paare ergibt. Natürlich kann die DMD aber auch auf Snapshots numerischer Simulationen, die häufig komplexwertige Strömungsfelder (z. B. wegen einer Fouriertransformation in einer der homogenen Koordinatenrichtungen) liefern, angewendet werden. In diesem Fall wird das DMD-Spektrum mit Hinblick auf die zeitliche Frequenz unsymmetrisch sein.

Zusammenfassung und Schlussfolgerungen

Eine neuartige Dekompositionstechnik, bezeichnet als Dynamic Mode Decomposition, wurde vorgestellt und anhand einer bildbasierten Strömungsvisualisierung erläutert. Die DMD erfordert lediglich eine zeitaufgelöste Sequenz von Snapshots für die robuste und objektive Extraktion von Strömungscharakteristiken, die die Strömungsdynamik in dem beobachteten Zeitintervall beschreiben. Mathematisch ist die Technik mit der Arnoldi-Methode verwandt. Anders als diese setzt die DMD aber weder explizit noch implizit die Verfügbarkeit einer Stabilitätsmatrix oder eines Strömungsmodells voraus. Während diese Tatsache etwas das Konvergenzverhalten im Vergleich zur Standard-Arnoldi-Methode beeinträchtigt, erlaubt sie die Behandlung von Sub-Regionen, um auf lokalisierte Instabilitäten zu fokussieren, und die Formulierung eines Stabilitätsproblems in einem räumlichen Bezugssystem.

Die Anwendung der DMD auf die Bildsequenz eines Freistrahls verdeutlichte die Detektion dynamisch relevanter, kohärenter Strukturen, die eine wichtige Rolle bei der Charakterisierung des Strömungsverhaltens in dem betrachteten Zeitintervall spielen.

Wir hoffen, dass die DMD ein hilfreiches Werkzeug für den Experimentator darstellen wird, um wichtige Mechanismen in komplexen Strömungen zu identifizieren und helfen wird, das Verständnis fundamentaler Strömungsvorgänge zu erweitern.

Dankesworte

Die Unterstützung durch die *Agence Nationale de la Recherche (ANR)* und ihr „chaires d'excellence“ Programm und durch die Alexander-von-Humboldt Stiftung wird dankbar erwähnt.

Literatur

- [1] Bagheri, S., Schlatter P., Schmid, P.J. & Henningson, D.S. (2009) Global stability of a jet in crossflow. *J. Fluid Mech.*, **624**, 33–44.
- [2] Edwards, W.S., Tuckerman, L.S., Friesner, R.A. & Sorensen, D.C. (1994) Krylov methods for the incompressible Navier-Stokes equations. *J. Comp. Phys.*, **110**, 82–102.
- [3] Gallaire, F. & Chomaz, J.-M. (2003) Mode selection in swirling jet experiments: a linear stability analysis. *J. Fluid. Mech.*, **494**, 223–253.
- [4] Greenbaum, A. (1997) *Iterative Methods for Solving Linear Systems*, SIAM Publishing, Philadelphia.
- [5] Lehoucq, R.B. & Scott, J.A. (1997) Implicitly restarted Arnoldi methods and subspace iteration. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **23**, 551–562.
- [6] Ruhe, A. (1984) Rational Krylov sequence methods for eigenvalue computation. *Lin. Alg. Appl.*, **58**, 279–316.
- [7] Schmid, P.J. & Henningson, D.S. (2001) *Stability and Transition in Shear Flows*, Springer Verlag, New York.
- [8] Schmid, P.J. & Sesterhenn, J.L. (2008) Decomposition Mode Decomposition of numerical and experimental data. *Bull. Amer. Phys. Soc.*, San Antonio/TX.
- [9] Schmid, P.J. (2009) Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data. *J. Fluid. Mech.*, (submitted).
- [10] Theofilis, V. (2000) Advances in global linear instability analysis of nonparallel and three-dimensional flows. *Prog. Aerosp. Sci.*, **39**, 249–315.
- [11] Trefethen, L.N. & Bau, D. (1997) *Numerical Linear Algebra*, SIAM Publishing, Philadelphia.